

ESEMPIO DI TEMI D'ESAME

I temi di matematica non utilizzano nozioni di analisi matematica quali limiti, derivate e integrali. Per avere una ampia esemplificazione e indicazioni sui modi di risolvere queste tipologie di problemi è ottimo il testo *I Problemi di matematica della Scuola Normale Superiore* – a cura di Franco Conti e Alessandro Profeti, Edizioni Bollati Boringhieri.

Vengono proposti due esempi di tema. Il candidato deve scegliere uno e uno solo tra i due temi che gli vengono proposti.

TEMA A

1. Sapendo che gli spigoli di un parallelepipedo rettangolo hanno somma $L > 0$, determinare tutti i possibili valori del suo volume.
2. Sia m un intero positivo. Dimostrare che la soluzione dell'equazione $10^x = m$ o è intera o è irrazionale
3. In una classe di 25 studenti il professore ha estratto a sorte l'ordine delle interrogazioni. Si viene a sapere che Carlo sarà interrogato prima di Bernardo. Qual è la probabilità che Anna sia interrogata prima di Carlo?
4. Un dado perfettamente bilanciato con facce numerate da 1 a 6 viene lanciato più volte.
 - a) Qual è la probabilità che lanciandolo 3 volte la somma dei punteggi sia divisibile per 6?
 - b) Qual è la probabilità che lanciandolo 3 volte la somma dei punteggi ottenuti sia divisibile per 7?
 - c) Qual è la probabilità che lanciandolo n volte la somma dei punteggi sia divisibile per 6?
 - d) Qual è la probabilità che lanciandolo n volte la somma dei punteggi sia divisibile per 7?
5. Si dimostri che dati comunque n interi positivi a_1, a_2, \dots, a_n è sempre possibile sceglierne alcuni in modo che la loro somma sia divisibile per n .
Nel caso $n = 4$, mostrare un caso in cui la scelta è obbligatoriamente ridotta a un solo addendo.

TEMA B

1. Dovendo addentrarsi in una zona desertica priva di rifornimenti è necessario costituire successivamente depositi di materiali e di carburante. Si sa che la capacità di trasporto del veicolo è di 1000 chilogrammi, e che ogni 100 chilometri vengono consumati 100 chilogrammi tra materiali e carburante. Il materiale necessario a costituire il deposito non incide sulla capacità di carico del veicolo. Alla luce di questi dati dire
 - a) Qual è la massima distanza a cui si può giungere (con ritorno alla partenza) senza depositi intermedi?
 - b) A quale distanza si può giungere (con ritorno alla partenza) con un deposito intermedio?
 - c) Quanti depositi intermedi sono necessari per giungere (con ritorno alla partenza) alla distanza di 1200 chilometri?

2. Dalla nave N viene avvistata la nave N' sotto l'angolo di rilevamento a . – L'angolo di rilevamento è l'angolo fra la retta poppa –prora di N e la retta orientata NN' . – Dopo qualche tempo la nave N' , che nel frattempo si è avvicinata, viene rilevata ancora sotto lo stesso angolo di rilevamento. Sapendo che le due navi si muovono di moto rettilineo uniforme, quali conseguenze si possono trarre. Giustificare adeguatamente la risposta.

- 3 Dato un numero naturale dispari n si consideri il seguente algoritmo:

$$a_1 = \frac{3n+1}{2}$$

se a_1 è pari l'algoritmo si arresta, altrimenti si calcola $a_2 = \frac{3a_1+1}{2}$

se a_2 è pari l'algoritmo si arresta, altrimenti si calcola $a_3 = \frac{3a_2+1}{2}$

e così via.

Dimostrare che, qualunque sia il numero n considerato, l'algoritmo si arresta. Stabilire il numero di termini da cui è costituita la successione a_1, a_2, \dots .

4. Determinare la probabilità di ottenere una somma < 14 gettando tre dadi.
5. Con il simbolo $[x]$ si indica la parte intera del numero reale x , ossia il più grande intero che non supera x . Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $x[x[x]] = 82$.

II Esempio di tema di concorso.

Il candidato scelga uno e uno solo tra i due temi seguenti

TEMA A

1. Si dispone di una bilancia con due piatti. Si dica qual è il minimo numero di pesi sufficiente a pesare oggetti il cui peso è un numero intero di grammi compreso tra 1 e 1000, distinguendo il caso in cui i pesi si dispongono su un piatto e l'oggetto sull'altro da quello in cui i pesi si possono disporre su ambedue i piatti.
2. Due amici scrivono, ognuno su un foglio, un numero intero positivo e lo consegnano a una terza persona. Costui scrive sulla lavagna due numeri s_1 e s_2 dicendo che la somma dei due numeri ricevuti è s_1 o s_2 . Il primo dei due dice allora “Non sono in grado di sapere quale delle due è la somma giusta”. Il secondo a questo punto dice “adesso sono in grado di saperlo”. Quali relazioni tra s_1 e s_2 e i due numeri scritti possono intercorrere per permettere l'affermazione del secondo amico? Si proponga un caso in cui non sarebbe possibile questa affermazione.

3. Avendo deciso di iscrivervi alla Facoltà di Scienze, ritenete di dover prima visitare il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Udine (chiamato dalla burocrazia DIMI) . Vi recate al polo scientifico dell'Università. Le persone che vi lavorano si dividono in due categorie: i sinceri, che dicono sempre la verità, e i bugiardi, che mentono sempre. I due tipi non sono distinguibili dall'aspetto esteriore né dal loro modo di parlare. Il vostro scopo è di scoprire a quale piano si trova il DIMI. In portineria trovate cinque persone che affermano
- A Il DIMI è al primo piano
 - B Se D è un bugiardo allora anche A è bugiardo
 - C Se esattamente uno tra B e E è un bugiardo, allora pure io sono bugiardo.
 - D Il DIMI è al terzo piano
 - E Almeno uno tra A e D è sincero.

Stabilire a quale piano si trova il DIMI.

4. Un allibratore offre le tre seguenti quote per la partita di calcio tra le squadre A e B.
- Vittoria di A 2,5 : 1
 - Vittoria di B 2 : 1
 - Pareggio 1,5 : 1.

Trovare

- a) la probabilità che l'allibratore assegna alla vittoria di A
- b) quale percentuale della somma totale raccolta nelle puntate prevede di guadagnare l'allibratore

Eslicitare le eventuali ipotesi che vengono usate per risolvere il problema.

5. Una pulce affetta da una strana malattia effettua salti su un piano orizzontale in qualunque direzione, ma secondo le seguenti regole: il primo salto è lungo 1 cm, il secondo 2 cm, il terzo 4 cm, l'ennesimo 2^n cm, etc,
Può la pulce dirigere i propri salti in modo da tornare prima o poi al punto di partenza?

TEMA B

1. Sia $f(t)$ una funzione iniettiva definita sui numeri reali positivi. Dati $x > 0$ e $y > 0$ si chiama f -media di x e y l'unico numero z tale che

$$f(z) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Mostrare che la media geometrica \sqrt{xy} è una f -media.

2. Quali poligoni regolari possono essere ottenuti tagliando un cubo con un piano?
3. Per trasportare una certa quantità q di materiale vi sono tre possibilità:
- a) autotrasporto al prezzo di $2x$, dove x è la quantità di merce trasportata
 - b) trasporto marittimo al prezzo di $1 + x^2/3$ dove x è la quantità di merce trasportata
 - c) strategia mista tra le due precedenti.
- Si determini la soluzione più economica al variare di q .

4. Vi sono due sacchetti: il primo contiene 3 palline nere e 5 bianche, il secondo 2 nere e 4 bianche.
Viene scelto a caso un sacchetto e da questo viene estratta a caso una pallina.
Sapendo che il colore di quest'ultima è bianco, qual è la probabilità che il sacchetto scelto fosse il secondo?
- 5 Far vedere che per qualsiasi numero naturale n il numero $n^3 - n$ è divisibile per 6.