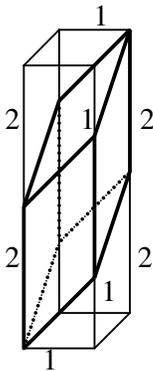


Il candidato svolga a scelta uno tra i due temi seguenti:

Tema 1.

Rispondere ai seguenti cinque quesiti motivando brevemente la risposta

1. Trovare tutte le soluzioni intere positive dell'equazione $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$
2. E' assegnato un quadrato di lato L . Dato un punto P su uno dei lati si costruisca un cammino formato da segmenti tale che tocchi gli altri tre lati e ritorni al punto di partenza. Determinare il cammino che ha la lunghezza totale minima e calcolarne la lunghezza. Tale lunghezza dipende dal punto P ?
3. Si effettua una sequenza di estrazioni da un'urna contenente 10 palline bianche e 5 palline nere con la seguente regola: nelle estrazioni di ordine dispari (prima, terza...) la pallina estratta viene eliminata, nelle estrazioni di ordine pari invece viene rimessa nell'urna (e le palline vengono rimescolate). Si registra la successione dei colori man mano che vengono estratti.
 - i) Qual è la probabilità che l'ultima pallina estratta sia nera?
 - ii) Quante estrazioni occorrono per esaurire tutte le 15 palline?
 - iii) Qual è la massima lunghezza possibile di una sequenza iniziale tutta di palline bianche?
4.
 - i) Qual è l'ultima cifra del numero 3^{15} ?
 - ii) Qual è l'ultima cifra del numero 3^{80} ?
5. Un prisma retto a base quadrata di lato 1 viene tagliato con due piani paralleli come mostrato in figura: si ottiene così un parallelepipedo (non rettangolo) V avente vertici $A=(0,0,0)$, $B=(1,0,1)$, $C=(1,1,2)$, $D=(0,1,1)$, $E=(0,0,2)$, $F=(1,0,3)$, $G=(1,1,4)$, $H=(0,1,3)$.



i) Calcolare la superficie totale di V

ii) Calcolare il volume di V

Tema 2.

Rispondere ai seguenti cinque quesiti motivando brevemente la risposta

1. Una moneta equilibrata viene gettata sei volte. Qual è la probabilità che “testa” esca tante volte quante “croce”? Qual è la probabilità che “testa” esca più volte di “croce”?
2. Si consideri il prodotto dei primi 2004 numeri naturali (si scrive di solito con il simbolo di fattoriale: $2004!$). Stabilire il numero di 0 consecutivi con i quali termina questo numero.
3. Sia $f(t)$ una funzione iniettiva definita sui numeri reali positivi. Dati $x > 0$ e $y > 0$ si chiama f -media di x e y l'unico numero z tale che

$$f(z) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Sia ora f così costruita:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t & \text{se } 1 \leq t < 2 \\ t - \frac{1}{2} & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

- i) Per quali coppie di valori x, y la f -media è eguale alla media aritmetica?
 - ii) Per quali coppie di valori x, y la f -media è maggiore della media aritmetica?
 - iii) Per quali coppie di valori x, y la f -media è minore della media aritmetica?
4. Si dispone di una bilancia a due piatti. Sono date 12 monete e sappiamo che una di queste è falsa, e differisce nel peso dalle altre. Facendo tre pesate come si può stabilire quale è la moneta falsa
 - i) sapendo che la moneta falsa pesa più delle altre?
 - ii) non sapendo se pesa di più o di meno delle altre?
 - iii) Nel caso i) dire qual è il massimo numero di monete tra cui si può individuare la moneta falsa con tre sole pesate.
 5. Data una curva C , chiameremo insieme orlato di ampiezza d della curva C - e lo indicheremo con il simbolo $O(C,d)$ - l'insieme dei punti del piano che hanno distanza minore o eguale a d da un punto della curva. Sia ora S una semicirconferenza di raggio 1 e sia L un segmento di lunghezza π .
 - i) Calcolare l'area di $O(S, 1/2)$
 - ii) Calcolare l'area di $O(S, 2)$
 - iii) Far vedere che per tutti i $d \geq 2$ risulta $\text{area}(O(L,d)) > \text{area}(O(S,d))$.