

## Prova di Matematica



1. Per ogni numero reale  $x$  nell'intervallo  $[0, 1[$  definiamo il successore  $x'$  di  $x$  nel seguente modo:

$$x' = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}.$$

Procedendo nello stesso modo con  $x'$  al posto di  $x$  e così via otteniamo, per ogni punto iniziale  $x$ , una successione di numeri nell'intervallo  $[0, 1[$ . Si dica per quali punti iniziali  $x$  tale successione è infinita. Si dica per quali punti  $x$  la successione ritorna ad  $x$  e poi si ripete ciclicamente.

2. In un piano cartesiano sia  $\mathcal{R}$  la famiglia dei rettangoli coordinati aperti a destra ed in alto e chiusi a sinistra ed in basso, ossia

$$R(a, b, c, d) = \{(x, y) \text{ tali che } a \leq x < b, c \leq y < d\}.$$

a) Si dica in quali casi il rettangolo  $R(a, b, c, d)$  è vuoto.

Sia ora  $\mathcal{S}$  la famiglia dei semipiani  $S(a) = \{(x, y) \text{ tali che } x < a\}$ .

b) Far vedere che l'intersezione di un qualsiasi insieme appartenente alla classe  $\mathcal{S}$  con un qualsiasi insieme della classe  $\mathcal{R}$  è ancora un insieme della classe  $\mathcal{R}$ .

c) Stabilire come è costituita la classe  $\mathcal{T}$  degli insiemi tali che la loro intersezione con un qualsiasi insieme della classe  $\mathcal{R}$  dà luogo ancora ad un insieme della classe  $\mathcal{R}$ .

3. E' dato un polinomio di grado  $\leq 3$ :  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Si sa che  $P(0) = 0$ ,  $P(1) = 0$ ,  $P(-1) < 0$ .

Si dica se le seguenti affermazioni sono possibili, impossibili, sempre vere, motivando brevemente le risposte.

a)  $ad = 1$ ;

b)  $a + d = 1$ ;

c)  $a^2 + b^2 = 0$ .

Scrivere un polinomio che soddisfi la condizione ulteriore  $P(x_0) = 0$  con  $x_0 < -1$ .

4. Una compagnia di assicurazioni suddivide le persone in due classi: quelle che sono propense ad incidenti e quelle che non lo sono. Le statistiche della assicurazione mostrano che le persone propense ad incidenti hanno probabilità 0,4 di avere un incidente in un anno, mentre questa probabilità scende a 0,2 per le altre persone. Supponendo che il 30% della popolazione sia propenso agli incidenti, qual è la probabilità che il nuovo assicurato abbia un incidente entro un anno dall'acquisto della polizza?

Supponiamo che il nuovo assicurato abbia un incidente entro un anno dall'acquisto della polizza. Qual è la probabilità che si tratti di una persona propensa ad incidenti?



Prova di Matematica n.2



1. Sia  $C$  una circonferenza nel piano euclideo con tre punti a coordinate razionali. Dimostrare che  $C$  può essere definita tramite una equazione a coefficienti razionali.

2. Sia dato un cilindro con asse verticale. Si tagli il cilindro partendo da un punto della base inferiore lungo una *elica cilindrica*, cioè salendo con velocità costante e contemporaneamente ruotando con velocità costante. Dire in quanti pezzi il cilindro risulta suddiviso dopo aver terminato il taglio (cioè quando si raggiunge la base superiore).

3. E' dato un polinomio di grado  $\leq 2$ :  $P(x) = ax^2 + bx + c$ . Si sa che  $P(-1) = 0$ ,  $P(1) = 0$ ,  $P(0) < 0$ .

Si dica se le seguenti affermazioni sono possibili, impossibili, sempre vere, motivando brevemente le risposte.

a)  $b < 0$ ;

b)  $a + b < 0$ .

Scrivere il polinomio che soddisfi la condizione ulteriore  $P(2) = 2$ .

4. Un'urna contiene 90 palline numerate da 1 a 90. Se ne estraggono casualmente 6 (senza rimetterle nell'urna). Qual è la probabilità che tra le sei vi siano le palline 1,2,3,4 ?

