A.A. 2007 – 2008
Esame scrittpo di ammissione alla Scuola Superiore
dell' Università di Udine - PROVA DI MATEMATICA n.1

1) Dimostrare che non esiste alcun polinomio $P(X,Y)$ in due variabili, di grado uno in Y, tale che per ogni numero reale t, si abbia

$$P(cos(t), sen(t)) = 0.$$

Idem per la relazione $P(sen(t), cos(t)) = 0$.
Il candidato enunci formalmente la seguente asserzione: *ogni relazione algebrica tra la funzione seno e la funzione coseno deriva dalla formula fondamentale*: $cos^2(t) + sen^2(t) = 1$.

2) Si consideri l'insieme $A(a)$ descritto dalla relazione

$$A(a) = \{(x,y) : (a+x)(a+1-y) \leq a(a+1),\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\},$$

al variare del parametro $a > 0$. Disegnare tale insieme e calcolare il limite della sua area per $a \to 0^+$ e per $a \to +\infty$. Trovare, al variare del parametro a, i punti dell'insieme $A(a)$ che si trovano a minima distanza da $(1,0)$.

3) La parte intera $\lfloor x \rfloor$ di un numero reale x è quel numero intero relativo n per cui si ha $n \leq x < n+1$. Ad esempio, $\lfloor 3.8 \rfloor = 3$, $\lfloor -3.1 \rfloor = -4$, $\lfloor -5 \rfloor = -5$. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \left| x - 2 \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \right|$$

(dove $|r|$ è il valore assoluto (modulo) del numero reale r) e verificare che è periodica, determinandone il periodo minimo. Tracciare quindi il grafico della funzione $g(x) = (f(x))^2$. Determinare, al variare di $k = 2, 3, \ldots,$ il numero delle soluzioni dell' equazione $f(kx) = x$, con $0 \leq x \leq 1$.

4) Dimostrare che le coppie di numeri naturali del tipo (n, n^2+2) sono o coprime oppure hanno massimo comune divisore uguale a due. Generalizzare il ragionamento determinando i possibili massimi comuni divisori di coppie di numeri del tipo $(n^3+2, n+3)$.

5) Mostrare un esempio di una coppia di numeri reali a, b per la quale il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + y & = a \\ x \cdot y & = b \end{cases}$$

non ha soluzioni reali. Classificare quindi le coppie (a, b) per cui esistono soluzioni reali.
Consideriamo il sistema in tre variabili

$$\begin{cases} x + y + z & = a \\ x \cdot y \cdot z & = b \end{cases}$$

Può succedere che non abbia soluzioni reali? Se ne ha, esse sono in numero finito o infinito?

AA 2007/2008
Esame scritto di ammissione alla Scuola Superiore dell'Università di Udine
PROVA di MATEMATICA n. 2

1. Un segmento di lunghezza L viene suddiviso in 9 segmenti ciascuno dei quali ha ampiezza maggiore o uguale a $L/20$. Su m di questi (tutti aventi la medesima ampiezza) vengono costruiti dei triangoli equilateri (aventi come lato il segmento scelto di volta in volta) mentre su n di questi (tutti aventi la medesima ampiezza) vengono costruiti dei quadrati (aventi come lato il segmento scelto di volta in volta). Trovare, per $m = 5$ e $n = 4$, la divisione ottimale del segmento di partenza (trovando le lunghezze degli intervalli su cui costruire i triangoli e i quadrati) in modo che la somma dei perimetri dei quadrati e dei triangoli risulti la minima possibile. Impostare il problema per m ed n arbitrari con $m + n = 9$.

2. Si consideri l'insieme $A(a)$ descritto dalla relazione

$$A(a) = \{(x, y) : (a + x)(a + 1 - y) \leq a(a + 1), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

al variare del parametro $a > 0$. Rappresentare geometricamente tale insieme e calcolare il limite della sua area per $a \longrightarrow 0^+$ e per $a \longrightarrow +\infty$.

3. La parte intera $\lfloor x \rfloor$ di un numero reale x è quel numero intero relativo n per cui si ha $n \leq x < n + 1$. Ad esempio, $\lfloor 3.8 \rfloor = 3$, $\lfloor -3.1 \rfloor = -4$, $\lfloor -5 \rfloor = -5$. Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \left| x - 2 \left\lfloor \frac{x + 1}{2} \right\rfloor \right|$$

e verificare che è periodica, determinandone il periodo minimo. Tracciare quindi il grafico della funzione $g(x) = (f(x))^2$.

4. In un barattolino si introducono due monete uguali e perfette, ciascuna con una faccia contrassegnata da una croce e l'altra faccia da una testa. Il barattolo viene agitato e poi rovesciato su un tavolo. Si consideri la probabilità dell'evento "le monete presentano entrambe la faccia contrassegnata da testa". Di seguito si propongono diverse soluzioni per determinare tale probabilità. Si dica quale o quali sono accettabili (ovvero non accettabili) motivando le risposte.

   (a) Concentrandosi sul numero delle teste si può avere nessuna testa, una testa o due teste. Vi sono tre possibilità delle quali una sola "favorevole" ossia corrispondente all'evento del quale si vuole valutare la probabilità. Pertanto la probabilità richiesta è $1/3$.

   (b) Anche se le monete sono uguali, si supponga di poterle distinguere in qualche modo etichettando una come prima moneta e l'altra come seconda. In questo modo si può fare riferimento ai seguenti eventi:
   "la prima moneta presenta testa e la seconda testa";
   "la prima moneta presenta testa e la seconda croce";

"la prima moneta presenta croce e la seconda testa";

"la prima moneta presenta croce e la seconda croce".

Uno solo degli eventi precedenti corrisponde all'evento del quale si vuole valutare la probabilità mentre vi sono in tutto quattro eventi: la probabilità richiesta è 1/4.

(c) Si possono avere due soli casi: o si presentano due teste oppure no. Pertanto la probabilità richiesta è 1/2.

5. Si considerino due lanci consecutivi di una moneta perfettamente equilibrata e si supponga di guadagnare 1 Euro se esce testa al primo lancio, 2 Euro se esce testa per la prima volta al secondo lancio. Il guadagno medio è:

$$1 \cdot Prob(\text{"esce T al I lancio"}) + 2 \cdot Prob(\text{"prima T al II lancio"}) =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 \text{ Euro}$$

Un nuovo gioco consiste nel ripetere (indefinitamente) i lanci della moneta finché non esce testa, ottenendo in tal caso un guadagno definito nei punti seguenti. Con riferimento alla situazione descritta, si risolvano i seguenti quesiti:

(a) supponendo che il valore del guadagno sia 2^{h-1} se la prima testa esce al lancio $h-esimo$, stabilire qual è il guadagno medio;

(b) supponendo che il valore del guadagno sia $ln(2^{h-1})$ se la prima testa esce al lancio $h-esimo$, scrivere l'espressione (in termini di somma infinita) del guadagno medio

(c) calcolare il valore del guadagno medio nel caso **(b)**.

6. Mostrare un esempio di una coppia di numeri reali a, b per la quale il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + y = a \\ x \cdot y = b \end{cases}$$

non ammette soluzioni reali. Classificare quindi le coppie (a, b) per cui esistono soluzioni reali. Consideriamo il sistema in tre variabili

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x \cdot y \cdot z = b \end{cases}$$

Può succedere che non abbia soluzioni reali? Se ne ha, esse sono in numero finito o infinito?