

PC

Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine

Prova di ammissione, A.A. 2009/2010

Prova di Matematica, 2 settembre 2009

Prova A

- 1 Scrivere le formule per esprimere $\cos(2t)$ e $\cos(3t)$ in termini di $\cos(t)$. Esistono formule analoghe per esprimere $\sin(2t)$, $\sin(3t)$, ... in funzione solo di $\sin(t)$? Giustificare le risposte.
- 2 Dare la definizione geometrica di *ellisse*. Dato un qualsiasi punto su di una ellisse, è possibile iscrivere un triangolo equilatero con vertice nel punto scelto?
- 3 Si consideri una scacchiera infinita; partendo da una casella P , siamo autorizzati a compiere le seguenti mosse: (a) spostarci a destra di due (caselle) e in alto di una; (b) a sinistra di una e in alto di due; (c) a sinistra di due e in basso di una; (d) in basso di due e a destra di una. Possiamo raggiungere tutte le altre caselle, partendo da P e utilizzando mosse di tipo (a), (b), (c), (d)? Vogliamo colorare le caselle della scacchiera in modo che due caselle abbiano lo stesso colore se e solo se si può andare dall'una all'altra tramite mosse del tipo descritto. Quanti colori dobbiamo utilizzare?
- 4 Sia P un polinomio a coefficienti interi tale che $P(3) = 7$. Se n, m, k sono tre interi distinti tali che $P(n) = P(m) = P(k) = 2$ dimostrare che, a meno dell'ordine, dei tre numeri due coincidono con 2 e 4 mentre il terzo è 8 oppure -2 .
- 5 Dimostrare che per ogni x compreso tra 0 e π e per ogni n intero positivo si ha $|\sin(nx)| \leq n \sin x$.
- 6 Siano a_1, a_2, \dots, a_n , e b_1, b_2, \dots, b_n due qualsiasi permutazioni dei primi n interi positivi $1, 2, \dots, n$. Dimostrare che se n è dispari allora il prodotto

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \cdots (a_n - b_n)$$

è un intero pari.

pp

Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine

Prova di ammissione, A.A. 2009/2010

Prova di Matematica, 2 settembre 2009

Prova B

- 1 Scrivere le formule per esprimere $\cos(2t)$ e $\cos(3t)$ in termini di $\cos(t)$. Esistono formule analoghe per esprimere $\sin(2t)$, $\sin(3t)$, ... in funzione solo di $\sin(t)$? Giustificare le risposte.
- 2 Un viaggiatore in un aeroporto deve percorrere un tragitto di duecento metri, dei quali cento su un corridoio, cento su un nastro trasportatore. Supponiamo che mentre sta sul nastro trasportatore continui a camminare con la sua normale andatura, quindi con la stessa velocità (rispetto al nastro). Si accorge di avere una scarpa slacciata. Gli conviene (al fine di giungere prima al termine) fermarsi per allacciarsi la scarpa quando si trova sul nastro, o quando si trova nel corridoio?
- 3 Nel gioco del Bridge si distribuiscono le 52 carte, 13 per ogni seme, tra i quattro giocatori A, B, C, D . Supponiamo che A e B posseggano ciascuno quattro carte di cuori, per cui C e D complessivamente ne posseggono cinque. Qual è la distribuzione più probabile dei cuori tra C, D ? (Tutte e cinque le carte di cuori vanno allo stesso giocatore, oppure quattro ad uno e una all'altro, oppure tre e due?) Giustificare la risposta.
- 4 Trovare il più piccolo numero naturale n tale che $n/2$ è un quadrato perfetto, $n/5$ è una quinta potenza e $n/7$ è una settima potenza.
- 5 Siano a_1, a_2, \dots, a_n , e b_1, b_2, \dots, b_n due qualsiasi permutazioni dei primi n interi positivi $1, 2, \dots, n$. Dimostrare che se n è dispari allora il prodotto

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \cdots (a_n - b_n)$$

è un intero pari.