Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine

Prova di ammissione, A.A. 2011/2012

Prova di Matematica, 15 settembre 2011

Prova A

1 Siano x, y due numeri reali positivi tali che

$$x + y = 1.$$

Dimostrare che

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

2 Dei pali di altezza diversa sono piantati in modo da formare un reticolo con m file di n pali ciascuno. Si formano così m file "orizzontali" e n file "verticali". Indichiamo con H_j ($j = 1, \ldots, m$) l'altezza del palo più alto sulla j-esima fila orizzontale e h_i ($i = 1, \ldots, m$) l'altezza del palo più basso sulla i-esima fila verticale. Dimostrare che

$$\min(H_1, \ldots, H_m) \geq \max(h_1, \ldots, h_n).$$

3 Siano $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ dei numeri interi compresi tra 1 e 1000. Supponiamo che per ogni coppia di numeri $a_i < a_j$ il loro minimo comune multiplo sia ≥ 1000. Dedurre che

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} < 2.$$

4 Sia $f(X)$ un polinomio a coefficienti interi

$$f(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \ldots + a_1 X + a_0,$$

dove $a_0, a_1, \ldots, a_d$ sono numeri interi, con $a_d \neq 0$. Supponiamo che per ogni numero naturale $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ il valore $f(n)$ sia un numero primo. Dedurre che allora il polinomio $f(X)$ è costante. Ottenere la stessa conclusione sotto l'ipotesi che ogni valore $f(n)$ sia una potenza di un numero primo.

5 Sia dato un disco materiale di densità di massa non necessariamente omogenea. Dimostrare che può essere tagliato da una retta in due parti aventi la stessa massa. E' sempre possibile tagliarlo in modo che le due parti abbiano stessa massa e stessa area?

PC

Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine

Prova di ammissione, A.A. 2011/2012

Prova di Matematica, 15 settembre 2011

Prova B

1 Siano x, y due numeri reali positivi tali che

$$x + y = 1.$$

Dimostrare che

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

2 Dei pali di altezza diversa sono piantati in modo da formare un reticolo con m file di n pali ciascuno. Si formano così m file "orizzontali" e n file "verticali". Indichiamo con H_j ($j = 1, \dots, m$) l'altezza del palo più alto sulla j-esima fila orizzontale e h_i ($i = 1, \dots, m$) l'altezza del palo più basso sulla i-esima fila verticale. Dimostrare che

$$\min(H_1, \dots, H_m) \geq \max(h_1, \dots, h_n).$$

3 Si consideri il triangolo T nel piano cartesiano di vertici

$$A = (1, 2), \quad B = (0, 3), \quad C = (1, 4).$$

Sia T' il triangolo di vertici.

$$A' = (2, 2), \quad B' = (4, 2), \quad C' = (3, 1).$$

Si calcolino le aree di T e T'. Esiste una rotazione che manda il triangolo T sul triangolo T'? Esiste una isometria(1) che manda T in T'?

4 Da un'urna contenente venti palline numerate da 1 a 20 si estraggono cinque palline. Qual è la probabilità che tra queste si trovino quelle numero 1, 2 e 3? E qual è la probabilità che si trovi almeno una tra quelle numerate $1, 2$ o 3?

5 Un nostro amico ha in mente quattro numeri, ma non vuole comunicarceli. Ci comunica invece la differenza dei primi due di tali numeri, la differenza tra gli ultimi due e la somma totale. Possiamo indovinare uno di quei quattro numeri? Giustificare la risposta.

---

(1) una isometria si ottiene componendo rotazioni, riflessioni assiali e traslazioni

PC