

**Scuola Superiore dell'Università degli studi di Udine.**  
**Prova di ammissione per Matematica, Ingegneria,**  
**Architettura, TWM ed Economia, a.a. 2012-13.**

**Esercizio 1.** Un'urna contiene 5 palline bianche e 4 nere. Il giocatore decide se il gioco si deve svolgere con o senza reimbussolamento ad ogni estrazione. Il banco estrae 6 palline alla cieca, con o senza reimbussolamento secondo la decisione del giocatore; quest'ultimo vince se vengono estratte tante palline bianche quante nere (ovvero 3 bianche e 3 nere).

Cosa deve decidere il giocatore per massimizzare le proprie probabilità di vittoria?

**Esercizio 2.** Sia  $I$  l'insieme dei numeri reali compresi fra 0 e 1, estremi inclusi. Sia  $R$  la funzione da  $I$  in sé definita da  $R(x) = 5x - |5x|$  (dove  $| \ ]$  denota la parte intera di un numero); per  $t \geq 0$  indichiamo  $R(R(\dots(R(x))))$  ( $t$  iterazioni di  $R$ ) con  $R^t(x)$ .

Determinare due numeri irrazionali  $\alpha, \beta$  in  $I$  tali che  $0 < |R^t(\alpha) - R^t(\beta)| < 2/5$  per ogni  $t \geq 0$ .

È possibile sostituire  $2/5$  con  $2/25$ ?

**Esercizio 3.** Sia  $V$  l'insieme dei vettori dello spazio tridimensionale (tutti i vettori hanno la propria origine nell'origine  $O$  degli assi cartesiani), dotato dell'operazione di somma vettoriale.

Definire un sottoinsieme  $P$  di  $V$  tale che

1.  $O$  sta in  $P$ ;
2. per ogni elemento  $v$  di  $V$  diverso da  $O$ , esattamente uno fra  $v$  e  $-v$  sta in  $P$ ;
3. la somma di ogni coppia di elementi di  $P$  sta in  $P$ .

**Esercizio 4.** All'interno di un rettangolo di lati 1 e  $a$  si vuole tracciare un secondo rettangolo con i lati paralleli a quelli del rettangolo esterno, in modo che il rettangolo interno e i quattro trapezi ottenuti congiungendo ogni vertice del rettangolo interno con il vertice più vicino di quello esterno abbiano tutti la stessa area.

Quali devono essere i lati del rettangolo interno?

**Esercizio 5.** Un polinomio della forma  $x^5 - 5x^4 + 5x^3 +$  (termini di grado inferiore) ha 5 radici distinte che costituiscono una progressione aritmetica.

Determinare tali radici.

**Esercizio 6.** Sia  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  l'insieme dei numeri naturali, e sia  $f$  una funzione da  $\mathbb{N}$  in sé tale che, per ogni  $n$  in  $\mathbb{N}$ , l'insieme degli  $m$  tali che  $f(m) = n$  è finito. Diciamo che  $n$  è di tipo 1 se è l'immagine tramite  $f$  di almeno un elemento, e che è di tipo  $k + 1$  se è l'immagine di almeno un elemento di tipo  $k$  (un elemento può dunque essere di vari tipi). Diciamo infine che  $n$  è di tipo  $\infty$  se è di tipo  $k$  per ogni  $k$ .

Dimostrare che  $n$  è di tipo  $\infty$  se e soltanto se è l'immagine di un elemento di tipo  $\infty$ .

Cosa accade rimuovendo l'ipotesi di finitezza?