Scuola Superiore dell'Università degli studi di Udine.
Prova alternativa di ammissione per Economia, a.a. 2012-13.

Esercizio 1. Un'urna contiene 5 palline bianche e 4 nere. Il giocatore decide se il gioco si deve svolgere con o senza reimbussolamento ad ogni estrazione. Il banco estrae 6 palline alla cieca, con o senza reimbussolamento secondo la decisione del giocatore; quest'ultimo vince se vengono estratte tante palline bianche quante nere (ovvero 3 bianche e 3 nere).

Cosa deve decidere il giocatore per massimizzare le proprie probabilità di vittoria?

Esercizio 2. Sia f una funzione dall'insieme dei numeri razionali a quello dei numeri reali tale che $f(x+y) = f(x) + f(y)$, per ogni due numeri razionali x, y.

Dimostrare che, per ogni x, si ha $f(x) = f(1) \cdot x$.

Esercizio 3. Sia V l'insieme dei vettori dello spazio tridimensionale (tutti i vettori hanno la propria origine nell'origine O degli assi cartesiani), dotato dell'operazione di somma vettoriale.

Definire un sottoinsieme P di V tale che

1. O sta in P;
2. per ogni elemento v di V diverso da O, esattamente uno fra v e $-v$ sta in P;
3. la somma di ogni coppia di elementi di P sta in P.

Esercizio 4. All'interno di un rettangolo di lati 1 e a si vuole tracciare un secondo rettangolo con i lati paralleli a quelli del rettangolo esterno, in modo che il rettangolo interno e i quattro trapezi ottenuti congiungendo ogni vertice del rettangolo interno con il vertice più vicino di quello esterno abbiano tutti la stessa area.

Quali devono essere i lati del rettangolo interno?

Esercizio 5. In una certa coltura vengono introdotti 1000 batteri. Dopo tre giorni vengono introdotti altri 2000 batteri, e dopo ulteriori tre giorni la coltura contiene 8000 batteri.

Qual è l'incremento percentuale medio giornaliero?

Esercizio 6. Sia $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ l'insieme dei numeri naturali, e sia f una funzione da $\mathbb{N}$ in sé tale che, per ogni n in $\mathbb{N}$, l'insieme degli m tali che $f(m) = n$ è finito. Diciamo che n è di tipo 1 se è l'immagine tramite f di almeno un elemento, e che è di tipo $k+1$ se è l'immagine di almeno un elemento di tipo k (un elemento può dunque essere di vari tipi). Diciamo infine che n è di tipo ∞ se è di tipo k per ogni k.

Dimostrare che n è di tipo ∞ se e soltanto se è l'immagine di un elemento di tipo ∞.

Cosa accade rimuovendo l'ipotesi di finitezza?