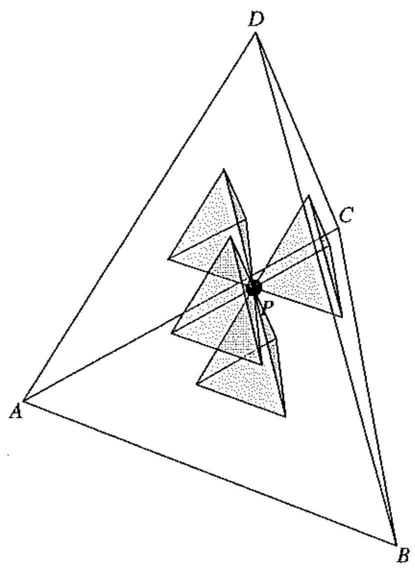
Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine

Prova alternativa di matematica Tema B

11 settembre 2014

Esercizio 1. Sia $ABCD$ un tetraedro di volume V, e sia P un suo punto interno. Tracciamo per P quattro piani, ognuno parallelo a una delle facce del tetraedro. Questi piani individuano quattro altri piccoli tetraedri, aventi un vertice in P e la faccia opposta che giace su una faccia del tetraedro originale (vedi la figura). Per ognuna dei triangoli BCD, ACD, ABD e ABC, siano rispettivamente S_1, S_2, S_3, S_4 la sua area, d_1, d_2, d_3, d_4 la distanze di P dal triangolo, e V_1, V_2, V_3, V_4 il volume del nuovo piccolo tetraedro una cui faccia è contenuta nel triangolo. Dimostrare che

$$V = \frac{S_1d_1 + S_2d_2 + S_3d_3 + S_4d_4}{3}, \quad \frac{S_id_i}{3} = V \cdot \sqrt[3]{\frac{V_i}{V}} \quad \text{per } i = 1, \ldots, 4,$$
$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4}.$$



Esercizio 2. Trovare delle costanti A, B, C tali che per ogni intero $n > 1$ valga

$$\frac{(n-1)(n+1)}{(2n-1)(2n+1))} = A + \frac{B}{2n-1} + \frac{C}{2n+1}.$$

B

Calcolare poi la seguente somma di 1002 termini

$$\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 9} + \cdots + \frac{1002 \cdot 1004}{2005 \cdot 2007}.$$

Esercizio 3. Indagare per quali interi n è vera la disuguaglianza

$$n! \cdot \frac{n}{n-1} \leq 1! + 2! + 3! + \cdots + n! \leq n! \cdot \frac{n}{n-2}.$$

Esercizio 4. Consideriamo un insieme di $2n$ elementi. Vogliamo ripartirlo in sottinsiemi a due a due disgiunti di due elementi ciascuno. In quanti modi si può fare?

Esercizio 5. Si consideri la funzione di variabile reale $f(x) = x/(x^2+1)$. Se ne disegni un grafico approssimativo. Sia x_0 un numero reale. Poniamo $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$,... Si discuta il comportamento della successione così ottenuta. Supponiamo che x_0 sia un numero intero. Dimostrare che $x_1, x_2, \ldots$ sono numeri razionali i cui denominatori (dopo aver ridotto ai minimi termini) formano una successione crescente.