

**PROVA A DI MATEMATICA  
ESAME DI AMMISSIONE  
SETTEMBRE 2015**

SCUOLA SUPERIORE  
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE

Il candidato svolga la seguente dissertazione e risolva il maggior numero possibile di problemi.

DISSERTAZIONE

**Equazioni algebriche.** Presentare in maniera sintetica la teoria generale negli ambiti conosciuti dal candidato. Enunciare e dimostrare alcuni risultati significativi.

ESERCIZIO 1

Un pianeta si muove in un'orbita attorno al Sole con moto circolare uniforme, a distanza  $r$ , con periodo di un anno. Un altro pianeta si muove con periodo di due anni, sempre in un'orbita circolare, a distanza  $r'$ . Le due orbite giacciono su uno stesso piano e i moti circolari hanno lo stesso verso. Supponendo che il moto sia determinato dal campo gravitazionale del Sole, determinare il rapporto  $r'/r$  e verificare in particolare che il secondo pianeta è esterno al primo. Si descriva il moto del secondo pianeta come osservabile dal primo<sup>1</sup>. Si dica se si verifica il fenomeno dei moti retrogradi.

Prescindiamo ora dalle leggi di Newton-Keplero. E' possibile che per due pianeti, aventi periodi di uno e due anni rispettivamente, posti ad opportune distanze dal Sole, non si verificano moti retrogradi apparenti?

ESERCIZIO 2

Si consideri un tetraedro con spigoli ortogonali di lunghezza  $a_1, a_2, a_3$ . Su ognuna delle quattro facce del tetraedro (spigoli e vertici esclusi) è univocamente definito il vettore normale di modulo unitario e con verso tale da essere orientato verso l'esterno del volume occupato dal tetraedro. Dimostrare che la somma dei vettori ottenuti moltiplicando il vettore normale ad una faccia per l'area della faccia associata (somma ovviamente estesa a tutte e quattro le facce) è il vettore nullo. Proporre possibili generalizzazioni del risultato.

---

<sup>1</sup>naturalmente le distanze reciproche non sono avvertibili dall'osservatore; pertanto si chiede di descrivere il moto angolare rispetto alle stelle fisse

## ESERCIZIO 3

Sia  $p$  un numero primo maggiore di 2. Scriviamo

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{m}{n}$$

dove  $m, n$  sono interi positivi coprimi. Dimostrare che  $p$  divide  $m$ .

## ESERCIZIO 4

Un vaso contiene 30 biglie numerate da 1 a 30. Qual è la probabilità che, estraendo 5 biglie contemporaneamente, si ottengano tra i numeri estratti almeno 2 quadrati perfetti ed esattamente un multiplo di 10?

## ESERCIZIO 5

Ci troviamo di fronte a tre scatole. Una delle scatole contiene mele, una pere, una contiene mele e pere. Le tre scatole sono etichettate con le etichette "Mele", "Pere", "Mele e Pere". Le tre etichette sono però state assegnate in modo che nessuna scatola sia etichettata correttamente. Vorremmo sistemare le etichette. L'unica operazione consentita è quella di estrarre un elemento da una delle scatole, guardarlo e reinserirlo nella scatola.

- Quante estrazioni sono necessarie per rietichettare correttamente le scatole?
- Come si generalizza il ragionamento nel caso di quattro scatole contenenti rispettivamente solo mele, solo pere, solo banane, e mele, pere e banane?