

9 10

PROVA B DI MATEMATICA  
ESAME DI AMMISSIONE  
SETTEMBRE 2015

SCUOLA SUPERIORE  
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE

Il candidato risolva il maggior numero possibile di problemi.

ESERCIZIO 1

Siano A e B due punti della superficie terrestre (assimilata ad una sfera di centro C e raggio r) appartenenti allo stesso meridiano. E' nota la latitudine  $\lambda_A$ ,  $\lambda_B$  di A e B, rispettivamente. Ricordiamo che la latitudine  $\lambda_A$  è l'angolo formato tra la direzione AC e il piano equatoriale nel piano che contiene il meridiano.

Nell'istante in cui il centro della Luna (qui assimilata ad un punto materiale) appartiene al piano contenente il meridiano passante per A e B, si procede alla misura contemporanea dei due angoli  $\alpha_A$ ,  $\alpha_B$  formati dalla congiungente il punto di stazione A, B con il centro L della Luna e la direzione verticale del luogo in A e in B. Sapendo che è nota la lunghezza dell'arco  $\widehat{AB}$  appartenente alla superficie della Terra, calcolare il raggio r della Terra e la distanza (media) del centro della Luna dal centro della Terra.

ESERCIZIO 2

Si consideri un tetraedro con spigoli ortogonali di lunghezza  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ . Su ognuna delle quattro facce del tetraedro (spigoli e vertici esclusi) è univocamente definito il vettore normale di modulo unitario e con verso tale da essere orientato verso l'esterno del volume occupato dal tetraedro. Dimostrare che la somma dei vettori ottenuti moltiplicando il vettore normale ad una faccia per l'area della faccia associata (somma ovviamente estesa a tutte e quattro le facce) è il vettore nullo. Proporre possibili generalizzazioni del risultato.

ESERCIZIO 3

Un vaso contiene 30 biglie numerate da 1 a 30. Qual è la probabilità che, estraendo 5 biglie contemporaneamente, si ottengano tra i numeri estratti almeno 2 quadrati perfetti ed esattamente un multiplo di 10?

ESERCIZIO 4

Si consideri una lamina quadrata pesante con lato L e vertici A, B, C e D. I due triangoli  $T_1 = ABC$  e  $T_2 = ACD$  nei quali viene diviso il quadrato dalla diagonale AC hanno densità superficiale di massa costante nota e pari a  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  in  $T_1$ ,  $T_2$ , rispettivamente. Sapendo che  $\rho_2$  è il doppio di  $\rho_1$ , si calcoli la posizione del baricentro della lamina quadrata.

PE

## ESERCIZIO 5

Studiare la funzione  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$  disegnandone un grafico approssimativo. Risolvere l'equazione  $f(x) = x$  e l'equazione  $f(f(x)) = x$ . Cosa si può dire in generale delle soluzioni dell'equazione  $f(f(\dots f(x)\dots)) = x$ ?

## ESERCIZIO 6

Siano  $a, b, c$  e  $\epsilon$  numeri reali, con  $\epsilon > 0$ . Dimostrare che vale la disuguaglianza

$$ab \leq \frac{a^2}{\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2}.$$

PP