Prova scritta di Matematica A
Concorso di ammissione – Settembre 2017
Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine

Il candidato svolga la seguente dissertazione e risolva il maggior numero possibile di problemi.

Dissertazione

Trasformazioni geometriche del piano, isometrie, similitudini. Il candidato presenti i concetti e i risultati che ritiene fondamentali e mostri le proprietà delle figure geometriche che sono invarianti rispetto ai vari tipi di trasformazioni.

Problemi

1 Chiamiamo *continua* una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la proprietà seguente[1]: *per ogni scelta di due numeri reali $a < b$, la funzione f assume almeno una volta nell'intervallo $[a, b]$ ogni valore che sia compreso tra il valore in a e il valore in b.* Consideriamo la funzione tangente

$$\tan(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

E' definita sulla retta privata dei punti del tipo $\frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$; è il quoziente di due funzioni ben definite ovunque, continue e prive di zeri comuni. Inoltre è periodica di periodo π, mentre le funzioni coseno e seno sono periodiche di periodo 2π.
Dimostrare che non si esiste una scrittura del tipo

$$\tan(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

dove $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni periodiche di periodo π, continue e prive di zeri comuni.

2 Un corridore percorre un circuito perfettamente circolare attorno a Udine con velocità costante, per un tempo infinito. Tenendo conto del moto della terra attorno al proprio asse, e trascurando il moto attorno a Sole, si descriva il moto del corridore visto da un osservatore solidale con le stelle fisse. In particolare, si dica sotto quali condizioni sul tempo di percorrenza del circuito il moto risulta periodico. Supponiamo che il

[1] Non si tratta della definizione usuale di funzione continua; il candidato, se lo ritiene, può enunciare la definizione di continuità che conosce e svolgere l'esercizio di conseguenza

circuito venga percorso in 59 minuti. Qual è il periodo del moto? Può succedere che il corridore passi due volte nello stesso punto (rispetto alle stelle fisse) con direzioni diverse (sempre rispetto alle stelle fisse)?

3 Siano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ una coppia di numeri reali tali che

$$xy \in \mathbb{Z}, \qquad x + y \in \mathbb{Z}.$$

Dimostrare che per ogni intero $n > 0$ la coppia (x^n, y^n) ha la stessa proprietà. Supponiamo che per ogni intero $n > 0$, $x^n + y^n \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che allora $xy \in \mathbb{Z}$. Siano ora x, y, z tre numeri reali positivi tali che

$$xyz \in \mathbb{Z}, \qquad x + y + z \in \mathbb{Z}. \tag{$*$}$$

Mostrare con un esempio che non sempre la terna (x^n, y^n, z^n) gode della proprietà $(*)$. Trovare un esempio di una terna x, y, z di numeri reali, nessuno dei quali intero, tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ la terna (x^n, y^n, z^n) soddisfi la proprietà $(*)$.

4 Supponiamo di saper calcolare solamente l'area di triangoli. Determinare l'area di un disco.

5 Sia $b_2, b_3, \ldots, b_{2n}$ una qualsiasi permutazione dei numeri $2, 3, \ldots, 2n$. Dimostrare che il numero $(b_2 + b_3) \cdot (b_4 + b_5) \cdots (b_{2n-2} + b_{2n-1}) \cdot b_{2n}$ è pari.