Prova scritta di Matematica – Tema A
Concorso di ammissione – Settembre 2018
Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine

Il candidato risolva il maggior numero possibile di problemi.

1. Una scacchiera uniforme è formata da 2^n caselle per lato con n intero positivo, $n \geq 2$. Si assuma di poter compiere solo le seguenti tipologie di mosse: 2 caselle a destra e 1 in alto; 1 casella a sinistra e 1 in alto; 2 caselle a sinistra e 1 in basso; 1 casella a destra e 1 in basso. È possibile raggiungere tutte le caselle partendo da una sola casella? Si colori l'intera scacchiera in modo tale che due caselle abbiano lo stesso colore se e solo se possono essere collegate muovendosi come sopra indicato. Quanti colori bisogna usare? Per quali valori di n la scacchiera ha tutti i vertici dello stesso colore?

2. La schermata di sblocco di uno smartphone è costituita da 9 punti distribuiti in una griglia quadrata 3×3. Una *combinazione di sblocco* consiste in una sequenza ordinata di almeno 1 e al massimo 5 punti della griglia, che siano collegabili da una *linea spezzata* secondo le seguenti regole: (a) ogni linea spezzata è composta di *tratti* e ogni tratto è un segmento che ha per estremi due punti diversi della griglia e non passa per nessun altro punto della griglia; (b) il dito dell'utente deve poter percorrere la spezzata dall'inizio alla fine senza mai doversi staccare dallo schermo o fermarsi; (c) la linea spezzata tocca tutti e soli i punti della griglia previsti nella combinazione di sblocco, secondo l'ordine stabilito dalla sequenza. Quante sono le diverse combinazioni di sblocco ammissibili? Si osservi che le regole $(a), (b), (c)$ consentono che una spezzata passi più di una volta sullo stesso punto della griglia.

3. Dimostrare che, se x e y sono due numeri reali non nulli e tali che $x + y = 2$, allora
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{2}{x^2y^2}.$$
Quali sono i numeri x, y (soddisfacenti le stesse condizioni) per cui la disuguaglianza vale in modo stretto?

4. Su un arco AB di una circonferenza si consideri un punto C, diverso da A e B, in modo da dividerlo in due archi AC e CB, i cui punti medi siano M e N, rispettivamente. Si indichino con D ed E le intersezioni della corda MN con le corde AC e CB, rispettivamente. Dimostrare che i due segmenti EC e FC sono congruenti.

5. I lati di un rettangolo misurano rispettivamente a e b, con a, b interi positivi, $a > b$. Fissati $a_1 = a$ e $b_1 = b$, si consideri il seguente procedimento iterativo per $i = 1, 2, \ldots$:

   - sia q_i il numero di quadrati di lato b_i contenuti nel rettangolo di lati a_i e b_i e sia r_i la misura del lato minore del rettangolo rimanente, con la convenzione di porre $r_i = 0$ se non rimane alcun rettangolo;
   - terminare il procedimento se $r_i = 0$, altrimenti porre $a_{i+1} = b_i$ e $b_{i+1} = r_i$.

   Dimostrare che tale procedimento termina sempre in un numero finito di passi. Indicato con n tale numero, dire che cosa rappresenta il numero b_n rispetto ai dati iniziali a e b. Dimostrare, inoltre, che
$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}.$$
   Si assuma, infine, $b = 1$. Se $a > 1$ è un numero reale, il procedimento potrebbe non terminare. Sotto tale ipotesi, determinare a nel caso in cui risulti $q_i = 1$ per ogni $i = 1, 2, \ldots$ e verificare che è irrazionale.