

Prova scritta di Matematica – Tema B
Concorso di ammissione – Settembre 2018
Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine

Il candidato risolva il maggior numero possibile di problemi.

1. Su una scacchiera infinita ci si muove da una casella all'altra solo secondo mosse a "L" in cui il passo verticale (che può essere sia verso l'alto che verso il basso) è sempre di due caselle, mentre quello orizzontale (che può essere sia verso sinistra che verso destra) è sempre di una casella. Stabilire se, partendo da una casella fissata, è possibile raggiungere qualunque altra casella utilizzando solo le mosse consentite. In caso negativo, si immagini di colorare le caselle della scacchiera in modo che due caselle abbiano lo stesso colore se e solo se si può passare dall'una all'altra tramite mosse consentite: quanti colori diversi servono?

2. Dato un intero positivo n , sia $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$ qualunque permutazione dei numeri $1, 2, \dots, 2n - 1$. Esistono permutazioni tali per cui il prodotto

$$(a_1 + a_2)(a_3 + a_4) \cdots (a_{2n-3} + a_{2n-2})a_{2n-1}$$

sia dispari? In caso affermativo caratterizzare l'insieme di tali permutazioni e determinarne la cardinalità. Dimostrare che esistono permutazioni tali per cui il prodotto risulta $(2n - 1)^n$.

3. Sia dato un polinomio di grado 3

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

tale che

$$p(0) = p\left(-\frac{1}{4}\right) = 0, \quad p\left(-\frac{1}{2}\right) > 0, \quad p(1) < 0.$$

Si dica se le seguenti disequazioni sono possibili, impossibili o sempre vere, motivando brevemente le risposte:

- (i) $ad < 0$
- (ii) $a + d < 0$
- (iii) $a^2 - b^2 < 0$.

4. Due piani paralleli tagliano un cilindro retto di raggio r e altezza h in tre pezzi, senza intersecarne le basi e formando un angolo α con i piani che le contengono. È possibile determinare il volume del pezzo centrale? In caso negativo, quanti altri dati è necessario conoscere? Avendo a disposizione questo minimo numero di informazioni, determinare volume e superficie del pezzo centrale. È inoltre possibile determinare il volume e la superficie degli altri due pezzi separatamente?
5. Determinare un'approssimazione di π sapendo calcolare solamente l'area di triangoli. È possibile estendere il ragionamento sapendo calcolare solamente l'area di quadrati? In quest'ultimo caso ci si aspetta una formula risultante più o meno complicata?

