

MATEMATICA A

Esercizio 1. In una comunità composta da maschi e femmine vale la seguente struttura poligamica:

- 1. ogni coppia di maschi distinti condivide una ed un'unica femmina (nel senso che esiste un'unica femmina coniugata con entrambi);
- 2. ogni coppia di femmine distinte condivide uno ed un'unico maschio;
- 3. ci sono quattro femmine tali che nessun maschio sia coniugato con più di due di queste.

Si chiede, giustificando la risposta,

- a) se questa struttura comporta la parità di genere;
- b) se ciascun maschio è coniugato con 50 femmine, qual è il numero totale degli individui di questa comunità?

Esercizio 2. Come nel film "Duri a morire", il poliziotto McLane ed il suo compagno Zeus Carver, per disinnescare una bomba posta presso una fontana, devono versare una precisa quantità di acqua in un recipiente disponendo di due caraffe da  $a$  e  $b$  litri di acqua ( $a$  e  $b$  numeri naturali). Le operazioni consentite sono:

- 1. riempire fino all'orlo una caraffa;
- 2. versare il contenuto di una caraffa nell'altra fino a vuotare la prima o riempire completamente la seconda;
- 3. vuotare nella vasca della fontana, o nel recipiente, il contenuto di una caraffa.

Si chiede, giustificando la risposta, quale sia la minima quantità di acqua misurabile in questo modo.

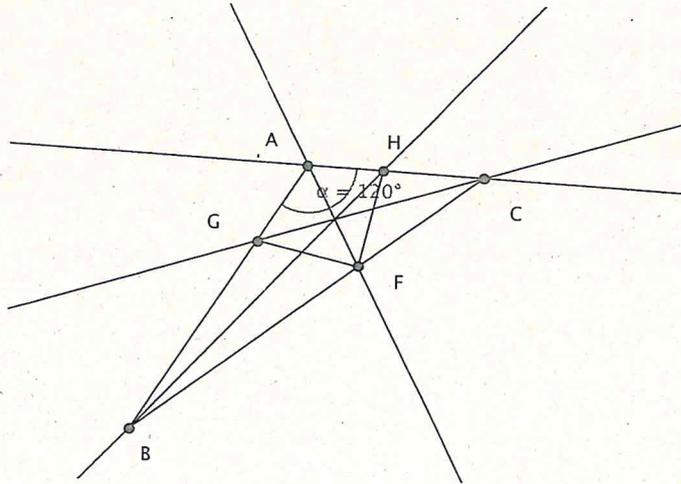
Esercizio 3. Tre coccinelle  $c_1, c_2$  e  $c_3$  sono disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato 1 metro. Al tempo  $t_0 = 0$ , con velocità costante pari a 1 metro al minuto, la coccinella  $c_1$  si muove verso la coccinella  $c_2$ , la coccinella  $c_2$  si muove verso la coccinella  $c_3$  e la coccinella  $c_3$  si muove verso la coccinella  $c_1$ . Si dimostri che le coccinelle si incontrano dopo un tempo finito  $t$  al centro del triangolo e si calcoli il tempo  $t$ .

Esercizio 4. Dati  $a, b \in \mathbb{Z}$ , con  $b \neq 0$  e  $MCD(a, b) = 1$ , trovare le soluzioni intere dell'equazione

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{a+x}{b+y}$$



**Esercizio 5.** Dato un triangolo  $ABC$  in cui l'angolo in  $A$  misura  $120$  gradi, siano  $F, G, H$  le intersezioni tra la bisettrice di un angolo (in  $A, C, B$ , rispettivamente) e il suo lato opposto. (vedi figura). Dimostrare che l'angolo  $\angle GFH$  (con vertice in  $F$ ) è retto.



**Esercizio 6.** Nell'insieme dei triangoli con perimetro dato, si determini quello con area massima.