

MATEMATICA B

Esercizio 1. Davanti a voi avete cinque carte coperte: due rosse, due nere e un jolly. Nel retro di ogni carta c'è una frase: se la carta è rossa, la frase è vera, se la carta è nera, la frase è falsa, se la carta è il jolly, la frase può essere vera o falsa. Queste le frasi scritte sulle carte:

Carta 1: Questa carta è nera

Carta 2: Questa carta è rossa

Carta 3: La carta 5 è nera

Carta 4: La carta 1 è rossa

Carta 5: La carta 4 è nera

Esercizio 2. Nei giochi di ruolo è comune usare dati a più facce, non necessariamente sei. La regola base per costruire tali dadi è che in un dado a n facce la somma dei valori di due facce opposte deve essere $n + 1$.

Non sempre c'è un modo univoco per assegnare i valori alle facce. Per esempio in un dado a 6 facce ci sono due possibili distribuzioni di numeri, a seconda che le facce con i numeri 1, 2 e 3 siano disposte in senso orario o antiorario intorno al loro vertice comune. Quanti sono i possibili tipi diversi di dado a 8 facce, ovvero di dado ottaedrico? Quanti di dado a 12 facce, ovvero di dado dodecaedrico?

Esercizio 3. Una partizione di un numero intero $n \geq 1$ è una decomposizione di n in addendi interi m_1, \dots, m_k tali che $m_i \geq 1$ e $m_1 + \dots + m_k = n$. Per esempio le partizioni di 3 sono due: $2 + 1$ e $1 + 1 + 1$, mentre le partizioni di 4 sono quattro: $3 + 1$, $2 + 2$, $2 + 1 + 1$ e $1 + 1 + 1 + 1$. La quantità di partizioni di un dato numero è di solito difficile da calcolare, ma ha delle proprietà interessanti. Dimostrare che il numero di partizioni di un intero n in al più r parti è uguale al numero delle sue partizioni in parti ciascuna al massimo uguale a r .

Esercizio 4. Sia $p(x, y)$ un polinomio a coefficienti reali nelle due variabili x e y tale che $p(n, 0) = 0$ per ogni intero positivo n . Si provi che esiste un polinomio $q(x, y)$ tale che $p(x, y) = y \cdot q(x, y)$.

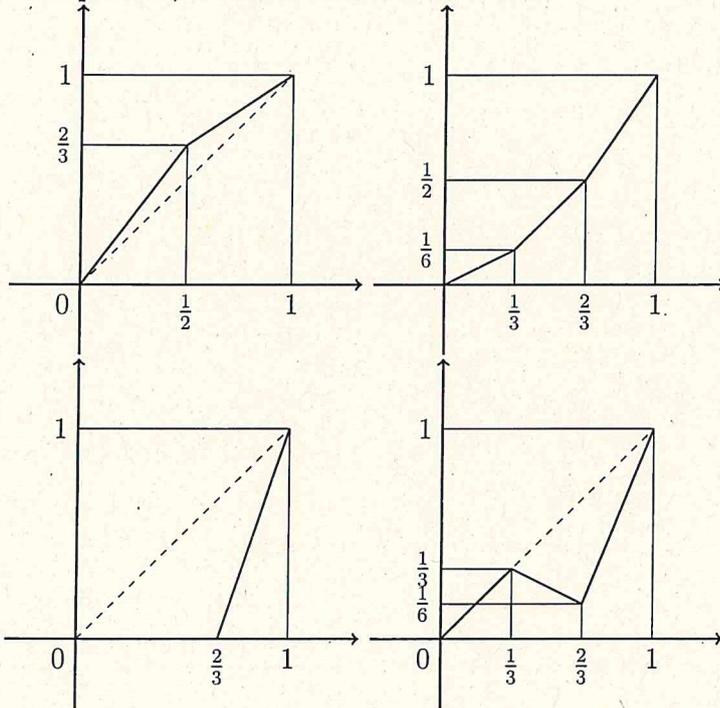
Esercizio 5. La funzione di Gini studia la distribuzione della ricchezza. È la funzione $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ che a ogni numero x associa la percentuale (normalizzata a 1) della ricchezza posseduta dalla frazione x più povera in una società. Per esempio, $f(x) = x$ è la funzione di Gini in una società totalmente ugualitaria.

Disegnare il grafico della funzione di Gini per le seguenti società:

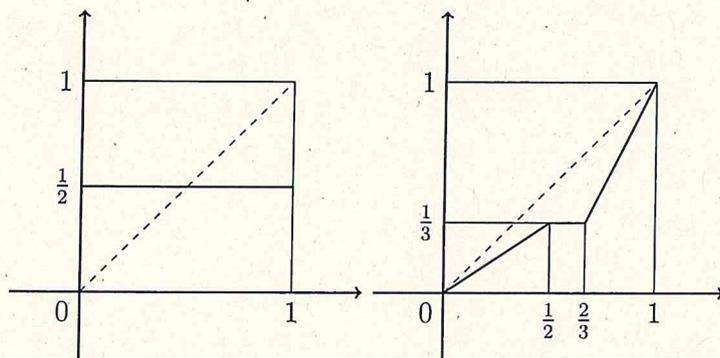


- Una società divisa in due classi, A e B, ognuna con metà della popolazione, dove tutte le persone nella stessa classe hanno la stessa ricchezza, e le persone di classe A hanno il doppio della ricchezza delle persone di classe B.
- Una società in cui il 10% più ricco possiede metà della ricchezza totale, e la ricchezza fra gli individui di questo 10% è equamente distribuita. Anche la ricchezza nel 90% più povero è equamente distribuita.

Quali dei seguenti grafici possono rappresentare una funzione di Gini?
Nei casi positivi, descrivere la relativa società.



SS



Esercizio 6. Nella stampa "Stelle" di M.C. Escher del 1948 compaiono diversi poliedri composti, incluso, in alto a sinistra, un composto di cubo e ottaedro, definito nel seguente modo:

Sia C un cubo di lato di lunghezza l . Consideriamo i punti medi dei suoi spigoli e il poliedro convesso P avente tali punti come vertici (il poliedro P è un cubottaedro). Descrivere l'ottaedro regolare Q tale che $P = C \cap Q$.

Il solido $C \cup Q$ è il composto che stavamo cercando. Determinare il volume di $C \cup Q$.