# Università degli Studi di Udine
# Test di ammissione alla Scuola Superiore
# Anno Accademico 2021/22
# Prova Scritta di MATEMATICA A

**Esercizio A 1.** Siano $A$ e $B$ punti nel piano.

(1) Per quali punti $D$ esiste un punto $C$ tale che $D$ sia l'incentro (cioè il punto di incontro tra le bisettrici) del triangolo $ABC$?

(2) Dimostrare che se $D$ varia su una retta $\ell$ perpendicolare al segmento $AB$ allora l'insieme dei punti $C$ corrispondenti è contenuto in un'iperbole.

**Esercizio A 2.** Una proprietà è delimitata da un muro rettilineo di lunghezza $a$. Il proprietario vuole costruire una recinzione utilizzando una rete di lunghezza $\ell > a$ i cui estremi saranno fermati ai due estremi del muro e che verrà tesa con due pali in modo che l'area recintata formi un trapezio isoscele $T$ di cui il muro risulterà essere una delle basi. Ad ogni trapezio $T$ che può realizzare associa il valore $v(T) = h(T) \cdot A(T)$ dove $h(T)$ e $A(T)$ denotano, rispettivamente, l'altezza e l'area di $T$.

Quanto dovrà essere lunga l'altra base del trapezio perché $v(T)$ abbia il valore massimo?

**Esercizio A 3.** Si consideri un gioco che consiste di un mazzo di carte su ciascuna delle quali compaiono $n$ immagini diverse. Nessuna immagine compare su tutte le carte e due carte diverse hanno sempre una e una sola immagine in comune (in commercio si trovano versioni del gioco con $n = 6$ e $n = 8$). Ci chiediamo qual è il numero massimo $F(n)$ di carte che possono comporre un tale mazzo. Trovare una limitazione superiore a $F(n)$ e mostrare che questa limitazione è ottimale almeno per $n \leq 4$.

**Esercizio A 4.** Una bilancia a due piatti è dotata di pesi $w_i \in \mathbb{N}$ per $i = 1, \ldots, m$. La bilancia è in grado di riconoscere un numero naturale $n$ se per due opportuni sottoinsiemi disgiunti di indici $S, T \subseteq \{1, \ldots, m\}$ risulta $n + \sum_{i \in S} w_i = \sum_{i \in T} w_i$. Si dimostri che i pesi $w_i = 3^i$ per $i = 0, \ldots, k-1$ consentono di riconoscere tutti i numeri naturali in $\{1, 2, \ldots, \frac{3^k - 1}{2}\}$.

**Esercizio A 5.** Andrea, Barbara ed altre $n$ persone sono in fila davanti ad una farmacia.

(1) Per $k = 0, \ldots, n$ si determini qual è la probabilità che nella fila ci siano $k$ persone tra Andrea e Barbara e si verifichi che la somma di queste probabilità è 1.

(2) Si calcoli la probabilità che tra Andrea e Barbara ci sia un numero dispari di persone.

**Esercizio A 6.** (1) Si definisca un polinomio $p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con la proprietà che per ogni numero naturale $n$ il valore $p(n)$ è divisibile per 24.

(2) Si dimostri che per ogni polinomio $p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con quattro radici reali esistono infiniti numeri naturali $n$ tale che il valore $p(n)$ **non** è divisibile per 5.

**Esercizio A 7.** Dato un numero reale $x$ la *parte frazionaria* di $x$ è il numero $F(x) = x - \lfloor x \rfloor$, dove $\lfloor x \rfloor$ è la parte intera di $x$. Dati $x \in \mathbb{R}$ ed un numero naturale $n \geq 2$ si consideri l'insieme $S = \{x, 2x, \ldots, (n-1)x\}$.

(1) Si dimostri che se $\epsilon > 0$ ed esistono due elementi distinti $y, z \in S$ tali che $|F(y) - F(z)| \leq \epsilon$ allora esistono $w \in S$ e $k \in \mathbb{N}$ tali che $|w - k| \leq \epsilon$.

(2) Si dimostri che esistono $w \in S$ e $k \in \mathbb{N}$ tali che $|w - k| \leq \frac{1}{n}$.