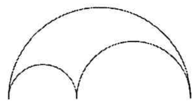
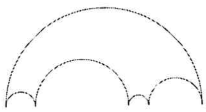
Università degli Studi di Udine
Test di ammissione alla Scuola Superiore
Anno Accademico 2021/22
Prova Scritta di MATEMATICA B

Esercizio B 1. Archimede parla, nella prop. XIV del 'Libro dei Lemmi', dell'*arbélos*: la superficie compresa tra tre semicirconferenze poste come in figura (gli estremi delle semicirconferenze giacciono sulla stessa retta).



Generalizziamo la nozione considerando n-arbélos, in cui le semicirconferenze piccole sono n e quindi un arbélos è un 2-arbélos (in figura un 4-arbélos).

AGM



Per ogni $n \geq 2$, qual'è l'n-arbélos di area massima tra quelli in cui la semicirconferenza maggiore ha raggio a?

Esercizio B 2. Si determinino tutte le soluzioni reali dell'equazione $\sum_{j=0}^{2k} x^{2k-j}\, y^j = 0$.

Esercizio B 3. Sia $n \leq 999$ un numero naturale e $\alpha\beta\gamma$ la sua rappresentazione decimale. Diciamo *rovescio* di n il numero con rappresentazione decimale $\gamma\beta\alpha$. Supponendo $\alpha \neq \gamma$ sia x il valore assoluto della differenza tra n ed il suo rovescio. Qual'è la somma di x e del suo rovescio?

Esercizio B 4. Una bilancia a due piatti è dotata di pesi $w_i \in \mathbb{N}$ per $i = 1, \ldots, m$. La bilancia è in grado di riconoscere un numero naturale n se per due opportuni sottoinsiemi disgiunti di indici $S, T \subseteq \{1, \ldots, m\}$ risulta $n + \sum_{i \in S} w_i = \sum_{i \in T} w_i$. Si dimostri che i pesi $w_i = 3^i$ per $i = 0, \ldots, k-1$ consentono di riconoscere tutti i numeri naturali in $\{1, 2, \ldots, \frac{3^k - 1}{2}\}$.

Esercizio B 5. Andrea, Barbara ed altre n persone sono in fila davanti ad una farmacia.

(1) Per $k = 0, \ldots, n$ si determini qual è la probabilità che nella fila ci siano k persone tra Andrea e Barbara e si verifichi che la somma di queste probabilità è 1.

(2) Si calcoli la probabilità che tra Andrea e Barbara ci sia un numero dispari di persone.

Esercizio B 6. (1) Si definisca un polinomio $p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con la proprietà che per ogni numero naturale n il valore $p(n)$ è divisibile per 24.

(2) Si dimostri che per ogni polinomio $p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con quattro radici reali esistono infiniti numeri naturali n tale che il valore $p(n)$ **non** è divisibile per 5.

Esercizio B 7. Dato un numero reale x la *parte frazionaria* di x è il numero $F(x) = x - \lfloor x \rfloor$, dove $\lfloor x \rfloor$ è la parte intera di x. Dati $x \in \mathbb{R}$ ed un numero naturale $n \geq 2$ si consideri l'insieme $S = \{x, 2x, \ldots, (n-1)x\}$.

(1) Si dimostri che se $\epsilon > 0$ ed esistono due elementi distinti $y, z \in S$ tali che $|F(y) - F(z)| \leq \epsilon$ allora esistono $w \in S$ e $k \in \mathbb{N}$ tali che $|w - k| \leq \epsilon$.

(2) Si dimostri che esistono $w \in S$ e $k \in \mathbb{N}$ tali che $|w - k| \leq \frac{1}{n}$.