

Prova scritta di matematica - B

Concorso di ammissione - Settembre 2022

Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine

1. (DOMANDA A RISPOSTA APERTA) Le funzioni trigonometriche. Enunciare e descrivere le principali definizioni e proprietà di questo strumento, fondamentale in algebra e geometria.
2. Frosty il pupazzo di neve è formato da due palle di neve sferiche uniformi, inizialmente di raggi $2R$ e $3R$. La più piccola (che è la sua testa) sta sopra il più grande. Quando ogni palla di neve si scioglie, il suo volume diminuisce ad una velocità che è direttamente proporzionale alla sua superficie, la costante di proporzionalità essendo la stessa per ogni palla di neve. Durante lo scioglimento, le palle di neve rimangono sferiche e uniformi. Quando Frosty è la metà della sua altezza iniziale, mostra che il rapporto tra il suo volume e il suo volume iniziale è $37:224$. Qual è questo rapporto quando Frosty è un decimo della sua altezza iniziale?

3. Nel triangolo ABC ,

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 1.$$

Dimostrare che

$$\min\{A + B, B + C, C + A\} < 30^\circ.$$

4. Un gruppo di turisti viaggia in n autobus (dove $n \geq 1$ e non è un numero primo) e viene accompagnato a una stazione ferroviaria. Insieme a 7 persone già in attesa alla stazione, si distribuiscono equamente nei 14 vagoni ferroviari. Ogni autobus, quasi pieno fino alla capacità di 52 passeggeri, trasportava lo stesso numero di persone. Supponendo che il numero di turisti sia il più piccolo possibile per le condizioni date, trova il numero di persone in ogni vagone ferroviario.
5. Un treno di lunghezza l_1 e un autocarro di lunghezza l_2 si stanno dirigendo verso un passaggio a livello alle velocità u_1 e u_2 rispettivamente. Inizialmente, la parte anteriore del treno e la parte anteriore del camion si trovano a distanze d_1 e d_2 dall'incrocio. Trova le condizioni su u_1 e u_2 per cui si verificherà una collisione. Su un diagramma, con u_1 e u_2 misurati rispettivamente lungo gli assi x e y , disegnare la regione che rappresenta collisione.
6. Se $P(x)$ denota un polinomio di grado n tale che $P(k) = k/(k+1)$ per $k = 0, 1, 2, \dots, n$, determinare $P(n+1)$. [SUGGERIMENTO: considerare il polinomio $Q(x) = (x+1)P(x) - x$]