

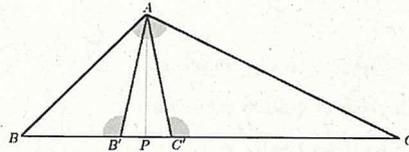
## Prova scritta di matematica - A

Scuola Superiore dell'Università di Udine - Concorso di ammissione - Settembre 2024

1. DOMANDA APERTA: Funzioni fra insiemi: introduzione, principali definizioni, esempi.
2. In un modello semplificato di mercato azionario, l'azione di un'azienda sale di una unità con probabilità  $p$ , scende di una unità con probabilità  $q$  e rimane stabile con probabilità  $1 - p - q$ , senza che l'andamento di un giorno influenzi i successivi. Dimostrare che, se  $p > q$ , allora la probabilità che l'azione sia in perdita dopo un qualsiasi numero  $n$  di giorni è minore di  $\frac{1}{2}$ .
3. Un polinomio  $f(X)$  a coefficienti razionali è detto *a valori interi* se  $f(n)$  è un numero intero relativo per ogni numero intero relativo  $n$ .
  - (a) Dimostrare che il polinomio  $f(X) = \frac{5}{6}X^3 - 3X^2 + \frac{13}{6}X - 1$  è a valori interi.
  - (b) Dimostrare che un polinomio di secondo grado  $p(X) = aX^2 + bX + c$  è a valori interi se e solo se  $2a$  e  $a + b$  sono numeri interi relativi.

(si ricordi che l'insieme dei numeri interi relativi è  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots\}$ ).

4. È dato un triangolo di vertici  $A, B, C$ , scaleno in  $A$ . Il segmento  $\overline{PA}$  è l'altezza relativa al lato  $\overline{BC}$ . Su quest'ultimo segmento, i punti  $B'$  e  $C'$  sono tali per cui gli angoli  $\widehat{BB'A}$  e  $\widehat{AC'C}$  sono congruenti all'angolo  $\widehat{CAB}$ , come indicato in figura:

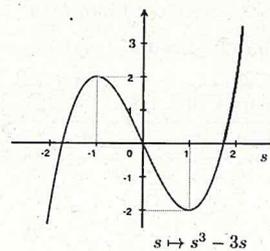
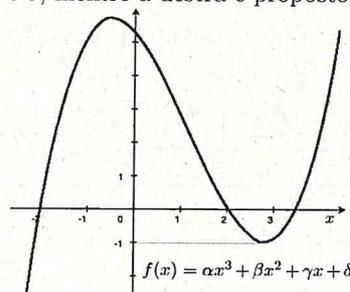


Dimostrare che vale l'uguaglianza

$$|\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 = |\overline{BC}|(|\overline{BB'}| + |\overline{CC'}|),$$

dove si è indicata con  $|\overline{XY}|$  la lunghezza del segmento di estremi  $X, Y$ .

5. Nella figura che segue, a sinistra è disegnato il grafico della funzione  $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$  per certi valori dei parametri  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$ , mentre a destra è proposto il grafico della funzione  $s \mapsto s^3 - 3s$ :



*NT*

- (a) Disegnare il grafico della funzione  $x \mapsto |f(x)|$ ;
- (b) Determinare il numero esatto di soluzioni reali dell'equazione  $|f(s^3 - 3s)| = \frac{2}{3}$  (giustificare la risposta).
6. Il docente di matematica suggerisce agli studenti di un certo corso un libro di esercizi con la raccomandazione, seguita da tutti gli studenti, di provare a svolgere diligentemente tutti gli esercizi proposti. Dopo due mesi il professore correggerà gli elaborati e ne trarrà debite conclusioni. Ci sono varie possibilità, descritte dai due seguenti gruppi di proposizioni:

**Gruppo P**

- P1) C'è uno studente che è in grado di risolvere almeno un esercizio
- P2) C'è uno studente che non sa risolvere alcun esercizio
- P3) C'è uno studente che sa risolvere tutti gli esercizi
- P4) C'è un esercizio che ogni studente è in grado di risolvere
- P5) C'è un esercizio che nessun studente è in grado di risolvere
- P6) Per ogni esercizio si può trovare almeno uno studente che sa risolvere quell'esercizio
- P7) Ogni studente sa risolvere almeno un esercizio
- P8) Tutti gli studenti sanno risolvere tutti gli esercizi

**Gruppo N**

- N1) C'è uno studente che non sa risolvere uno o più esercizi
- N2) Nessuno studente è in grado di risolvere alcun esercizio
- N3) C'è un esercizio che nessun studente sa risolvere
- N4) Nessun studente sa risolvere tutti gli esercizi
- N5) Per ogni esercizio c'è uno studente che sa risolvere quell'esercizio
- N6) C'è uno studente che non sa risolvere alcun esercizio
- N7) Per ogni esercizio c'è uno studente che non sa risolvere quell'esercizio
- N8) Ogni studente sa risolvere almeno un esercizio

Abbinare ad ogni proposizione del Gruppo P la sua negazione, scelta fra le proposizioni del Gruppo N. Riportare la risposta nella tabella che segue.

Gruppo P	P1)	P2)	P3)	P4)	P5)	P6)	P7)	P8)
Gruppo N								