

Prova scritta di matematica - B

Scuola Superiore dell'Università di Udine - Concorso di ammissione - Settembre 2024

1. DOMANDA APERTA: Funzioni fra insiemi: introduzione, principali definizioni, esempi.
2. Per determinare chi è più fortunato, A e B lanciano a turni un dado a n facce ($n > 2$; i valori sulle facce sono $1, \dots, n$), stabilendo che il primo che ottiene 1 vince. Determinare, in funzione di n , la probabilità che il primo giocatore vinca. Cosa succede se i due giocatori usano dadi diversi, con n e m facce?
3. Un polinomio $f(X)$ a coefficienti razionali è detto *a valori interi* se $f(n)$ è un numero intero relativo per ogni numero intero relativo n .
 - (a) Dimostrare che il polinomio $f(X) = \frac{5}{6}X^3 - 3X^2 + \frac{13}{6}X - 1$ è a valori interi.
 - (b) Dimostrare che un polinomio di secondo grado $p(X) = aX^2 + bX + c$ è a valori interi se e solo se $2a$ e $a + b$ sono numeri interi relativi.

(si ricordi che l'insieme dei numeri interi relativi è $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots\}$).

4. È dato un triangolo di vertici A, B, C , rettangolo in A . Il punto M divide l'ipotenusa in due segmenti congruenti. Dimostrare che

$$|\overline{AM}| = |\overline{BM}| = |\overline{CM}|,$$

dove si è indicata con $|\overline{XY}|$ la lunghezza del segmento di estremi X, Y .

5.
 - (a) Determinare le soluzioni reali di $\sqrt{x^2 - 1}\sqrt{x - 1} = (x - 1)\sqrt{x + 1}$.
 - (b) Determinare il numero esatto degli interi relativi $n \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\log_{10}(n^2 - 2n + 1) + \log_{10} 4 < 2$$

(si ricordi che $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots\}$).

6. Il docente di matematica suggerisce agli studenti di un certo corso un libro di esercizi con la raccomandazione, seguita da tutti gli studenti, di provare a svolgere diligentemente tutti gli esercizi proposti. Dopo due mesi il professore correggerà gli elaborati e ne trarrà debite conclusioni. Ci sono varie possibilità, descritte dai due seguenti gruppi di proposizioni:



Gruppo P

- P1) C'è uno studente che è in grado di risolvere almeno un esercizio
- P2) C'è uno studente che non sa risolvere alcun esercizio
- P3) C'è uno studente che sa risolvere tutti gli esercizi
- P4) C'è un esercizio che ogni studente è in grado di risolvere
- P5) C'è un esercizio che nessun studente è in grado di risolvere
- P6) Per ogni esercizio si può trovare almeno uno studente che sa risolvere quell'esercizio
- P7) Ogni studente sa risolvere almeno un esercizio
- P8) Tutti gli studenti sanno risolvere tutti gli esercizi

Gruppo N

- N1) C'è uno studente che non sa risolvere uno o più esercizi
- N2) Nessuno studente è in grado di risolvere alcun esercizio
- N3) C'è un esercizio che nessun studente sa risolvere
- N4) Nessun studente sa risolvere tutti gli esercizi
- N5) Per ogni esercizio c'è uno studente che sa risolvere quell'esercizio
- N6) C'è uno studente che non sa risolvere alcun esercizio
- N7) Per ogni esercizio c'è uno studente che non sa risolvere quell'esercizio
- N8) Ogni studente sa risolvere almeno un esercizio

Abbinare ad ogni proposizione del Gruppo *P* la sua negazione, scelta fra le proposizioni del Gruppo *N*. Riportare la risposta nella tabella che segue.

| | | | | | | | | |
|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Gruppo P | P1) | P2) | P3) | P4) | P5) | P6) | P7) | P8) |
| Gruppo N | | | | | | | | |