

Prova scritta di Matematica B
Concorso di ammissione – Settembre 2017
Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine

Il candidato risolva il maggior numero di problemi.

- 1 Un corridore percorre un circuito perfettamente circolare attorno a Udine con velocità costante, per un tempo infinito. Tenendo conto del moto della terra attorno al proprio asse, e trascurando il moto attorno a Sole, si descriva il moto del corridore visto da un osservatore solidale con le stelle fisse. In particolare, si dica sotto quali condizioni sul tempo di percorrenza del circuito il moto risulta periodico. Supponiamo che il circuito venga percorso in 59 minuti. Qual è il periodo del moto? Può succedere che il corridore passi due volte nello stesso punto (rispetto alle stelle fisse) con direzioni diverse (sempre rispetto alle stelle fisse)?
- 2 Sia a un numero irrazionale. Provare che il numero $(a + 1)/(2a + 3)$ è irrazionale. Cosa si può dire del numero $(a + \sqrt{3})/(a - \sqrt{3})$? Per quali razionali a il quoziente è razionale?
- 3 Sia dato un cilindro illimitato con asse verticale. Diciamo che una curva sul cilindro è una *elica cilindrica* se può essere percorsa in modo che siano costanti sia la velocità ascensionale, sia la velocità angolare della proiezione sul piano orizzontale. Due punti tracciano eliche cilindriche C_1, C_2 con la stessa velocità ascensionale ma diversa velocità angolare. E' sicuro che le eliche C_1, C_2 si incontrino? Supponiamo che i punti abbiano le stesse velocità verticali e angolari, ma uno si muova in senso orario (visto dall'alto) e l'altro in senso anti-orario. E' sicuro che le corrispondenti eliche si incontrino?
- 4 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un numero irrazionale. Dire se la funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$\cos x + \cos(\alpha x)$$
è periodica e se assume massimi e minimi assoluti.
- 5 Supponiamo di saper calcolare solamente l'area di triangoli. Determinare l'area di un disco.
- 6 Un disco privo di massa posto in un piano orizzontale sostiene tre masse puntiformi disposte sul suo bordo. Due di esse (m e $3m$) sono situate agli estremi di un diametro e l'altra massa (m) è posta ad un estremo del diametro ortogonale. Calcolare la posizione del baricentro del sistema. Cambiando le masse, il baricentro può essere un punto esterno al triangolo con vertici le tre masse puntiformi?