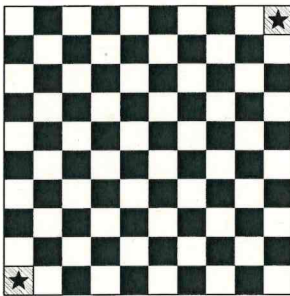




Esame di Ammissione - A.A. 2025/26

Prova Scritta di Matematica - B



1. Si consideri una scacchiera da 10×10 caselle. Due tessere speciali 1×1 sono poste sulle caselle in due angoli opposti della scacchiera. Si vorrebbe ricoprire le rimanenti 98 caselle della scacchiera utilizzando 49 tessere 2×1 . Descrivere come disporre tali tessere in modo da ricoprire tutta la scacchiera, oppure spiegare perché ciò è impossibile.

2. I fogli A4 sono caratterizzati dal fatto di poter essere tagliati a metà ottenendo due fogli rettangolari uguali più piccoli ma simili al precedente, ossia con le stesse proporzioni fra il lato maggiore e quello minore.

Si vuole riproporre la stessa idea in dimensione 3, tagliando a metà un parallelepipedo rettangolo, ottenendo così due piccoli parallelepipedo rettangoli uguali fra loro e simili a quello iniziale. Affinché ciò sia possibile, quali devono essere le proporzioni fra i lati di ciascuno dei parallelepipedo?

3. Trovare, al variare del valore del parametro $c \in \mathbb{R}$, quante e quali sono le coppie (ϑ, q) di numeri reali, con $0 \leq \vartheta < 2\pi$ e $q \in \mathbb{R}$, che risolvono il sistema

$$\begin{cases} (q^2 - c) \cos \vartheta = 0 \\ q + 2 \sin \vartheta = 0 \end{cases}$$

4. Dimostrare che $2^{2m} - 1$ è divisibile per 3 per ogni numero naturale m .

5. Siano a, b, c tre numeri reali tali che $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dimostrare che

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1$$

6. Sia E un insieme contenente dieci numeri naturali positivi minori o uguali a 100, tutti distinti fra loro. Dimostrare che esistono due sottoinsiemi $A \subseteq E$ e $B \subseteq E$ non vuoti e disgiunti fra loro, tali che la somma degli elementi di A è uguale alla somma degli elementi di B .